第４講　「割り切る」問題

12　n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする．

(1)　a と b は整数であることを示せ．

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ．　《13 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

13　n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする．このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14 a，b，c，d，e を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．《15 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　自然数 a，b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

16 (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　「割り切る」問題

12　n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする．

(1)　a と b は整数であることを示せ．

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ．　《13 京大・文系》

【答】 (1)　略　　(2)　略

【解説】 (1)　x^n を $(x-k)(x-k-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおくと

$$x^n=(x-k)(x-k-1)Q(x)+ax+b$$

と立式できるので，$x=k$ と $x=k+1$ を代入することで

$$k^n=ak+b \quad \cdots①, \qquad (k+1)^n=a(k+1)+b \quad \cdots②$$

を得る．この 2 式より $a=(k+1)^n-k^n$，$b=(k+1)k^n-k(k+1)^n$ となるが，これらは整数である．

(2)　a と b をともに割り切る素数が存在すると仮定して，その素数を p とすると，$a=\alpha p$，$b=\beta p$（α と β は整数）と表せるので，①と②より

$$k^n=\alpha pk+\beta p=p(\alpha k+\beta), \qquad (k+1)^n=\alpha p(k+1)+\beta p=p\{\alpha(k+1)+\beta\}$$

となる．ここで，k と $k+1$ は整数で，k^n と $(k+1)^n$ はともに素数 p の倍数なので，k と $k+1$ はともに p の倍数．つまり整数 l と m を用いて

$$k=lp, \qquad k+1=mp$$

と表せるが，2 式の差をとることより $1=p(m-l)$ となるので，$p=\pm1$ を得るが，これは p が素数であることに矛盾する．

よって a と b をともに割り切る素数は存在しない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

13　n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする．このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．
《13 京大・理系》

【答】 略

【解説】 整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割ったときの商を $Q_n(x)$，余りを a_nx+b_n とすると，

$x^1=(x^2-2x-1)\cdot 0+1\cdot x+0$ より $a_1=1$，$b_1=0$ …①である．

ここで $x^{n+1}=(x^2-2x-1)Q_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるが

$$\begin{aligned} x^{n+1}&=x\cdot x^n \\ &=x\{(x^2-2x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n\} \\ &=(x^2-2x-1)xQ_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &=(x^2-2x-1)(xQ_n(x)+a_n)+(2a_n+b_n)x+a_n \end{aligned}$$

より $a_{n+1}=2a_n+b_n$ …②，$b_{n+1}=a_n$ …③を得る．

①，②，③より a_n，$b_n (n=1, 2, \cdots)$ は帰納的に整数となる．

次に①より，$n=1$ のとき a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しない．

そこで $n=k(\geqq 1)$ のとき a_k と b_k をともに割り切る素数は存在しないことを仮定して，a_{k+1} と b_{k+1} をともに割り切る素数が p だとすると，$a_{k+1}=\alpha p$，$b_{k+1}=\beta p$（α と β は整数）と表せるが，②，③より $2a_k+b_k=\alpha p$，$a_k=\beta p$ となるので，これらより $a_k=\beta p$，$b_k=(\alpha-2\beta)p$ となり，a_k と b_k をともに割り切る素数は存在しないことに矛盾．よって a_{k+1} と b_{k+1} をともに割り切る素数は存在しない．

ゆえに $n=k+1$ のときにも a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しないことが示されたので，数学的帰納法により任意の自然数 n について a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しないことが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　a，b，c，d，e を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．《15 京大・理系》

【答】 略

【解説】 $f(x)=g(x)\left(\dfrac{a}{d}x+\dfrac{bd-ae}{d^2}\right)+\dfrac{cd^2-bde+ae^2}{d^2}$ より $p=\dfrac{a}{d}$，$q=\dfrac{bd-ae}{d^2}$，$r=\dfrac{cd^2-bde+ae^2}{d^2}$ とおくと，$f(x)=g(x)(px+q)+r$ と表せるので，示すべきは $r=0$ である．

ここで $f(n)=g(n)(pn+q)+r$ であるが，d，e，n は正より $g(n)=dn+e>0$ なので $\dfrac{f(n)}{g(n)}=pn+q+\dfrac{r}{g(n)}$ を得る．

このとき

$$\frac{f(n+2)}{g(n+2)}-2\times\frac{f(n+1)}{g(n+1)}+\frac{f(n)}{g(n)}=r\left(\frac{1}{g(n+2)}-\frac{2}{g(n+1)}+\frac{1}{g(n)}\right)$$
$$=r\times\frac{2d^2}{g(n+2)g(n+1)g(n)}$$

は任意の正の整数 n に対して整数になるが，

$$g(n+2)g(n+1)g(n)=(dn+e)(dn+d+e)(dn+2d+e)>(dn)^3$$

より $0\leqq|r|\times\dfrac{2d^2}{g(n+2)g(n+1)g(n)}\leqq\dfrac{2|r|}{dn^3}$ となるので，$n^3>\dfrac{2|r|}{d}$ を満たす整数 n に対しては $\dfrac{2|r|}{dn^3}<1$ となるから $r\times\dfrac{2d^2}{g(n+2)g(n+1)g(n)}=0$ に決まる．$2d^2\neq0$ より $r=0$ となるので，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　自然数 a，b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．
《14 京大・理系》

【答】 $(a,\ b)=(13,\ 14),\ (14,\ 13)$，最小値は 365

【解説】 $(a+b)^3=(a^3+b^3)+3ab(a+b)$ で，a^3+b^3 と $3ab(a+b)$ はともに 3 の倍数より $(a+b)^3$ は 3 の倍数．よって整数 k を用いて $a+b=3k$ と表せる．

このとき $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(3k)^3-3ab\cdot 3k=9k(3k^2-ab)$ は 81 の倍数であり，$3k^2$ は 3 の倍数だが ab は 3 の倍数ではないので，$3k^2-ab$ は 3 の倍数ではない．よって $k=9N$（N は整数）と表せる．

このとき $a+b=3k=27N$ であるが，$b=27N-a$ なので，

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= a^2+(27N-a)^2 \\ &= 2a^2-54Na+729N^2 \\ &= 2\left(a-\frac{27}{2}N\right)^2+\frac{729}{2}N^2 \end{aligned}$$

$N=1$ とすると $a^2+b^2=2\left(a-\dfrac{27}{2}\right)^2+\dfrac{729}{2}$ より，$a=13,\ 14$ のとき最小値 $13^2+14^2=365$ をとる．

$N\geqq 2$ とすると $\dfrac{729}{2}N^2\geqq 1458>365$ となり最小値が 365 以下となることはない．

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 14),\ (14,\ 13)}$ のとき a^2+b^2 は**最小値 365** をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

16　(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．
(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．　《12京大・理系》

【答】(1)　略　　(2)　略

【解説】(1)　$\sqrt[3]{2}$ は実数である．

ここで $\sqrt[3]{2}=\dfrac{m}{l}$ (l，m は自然数で互いに素) であると仮定すると，

$2=\dfrac{m^3}{l^3} \iff m^3=2l^3$

となり，$2l^3$ は偶数だから，m^3 つまり m は偶数．このとき自然数 k を用いて $m=2k$ と表せるが $m^3=2l^3 \iff (2k)^3=2l^3$ より $l^3=4k^3$ となるので，l^3 つまり l は偶数．

ゆえに m と l はともに偶数となるが，これは l と m が互いに素にあることに矛盾．

よって $\sqrt[3]{2}$ は有理数ではない実数，つまり無理数である．

(2)　$\sqrt[3]{2}=\alpha$ とおき，$P(x)$ を x^3-2 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを px^2+qx+r とすると

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+px^2+qx+r$$

が成り立つ．$P(x)$ は有理数を係数としていて x^3-2 も有理数係数なので，$Q(x)$ も有理数係数，p，q，r も有理数である．

このとき $x=\alpha$ を代入すると $\alpha^3-2=0$，$P(\alpha)=0$ より $P(\alpha)=p\alpha^2+q\alpha+r=0$ である．

ここで $p^2(\alpha^3-2)=(p\alpha^2+q\alpha+r)(p\alpha-q)+(q^2-pr)\alpha+(qr-2p^2)$ なので，

$\alpha^3-2=p\alpha^2+q\alpha+r=0$ を代入することで $(q^2-pr)\alpha+(qr-2p^2)=0$ を得る．

$q^2-pr\neq 0$ とすると $\alpha=-\dfrac{qr-2p^2}{q^2-pr}$ となり，(1)より α は無理数，p，q，r は有理数より $-\dfrac{qr-2p^2}{q^2-pr}$ は有理数なので矛盾．

よって $q^2-pr=0$ …①，ゆえに $qr-2p^2=0$ …②である．

ここで $p\neq 0$ であれば，①より $r=\dfrac{q^2}{p}$ とでき，これを②へ代入して整理すると $q^3=2p^3$ となり，p と q は実数より $q=p\alpha$ つまり $\alpha=\dfrac{q}{p}$ となる．これは α は無理数，$\dfrac{q}{p}$ は有理数なので矛盾．よって $p=0$ である．これと①より $q=0$，更に $p\alpha^2+q\alpha+r=0$ より $r=0$．以上より $p=q=r=0$ なので，px^2+qx+r は恒等的に 0，つまり $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。